Übungen Finanzmathematik 3: Tilgungsrechnung

Ü.Fi.3.1: Zur Finanzierung eines Investitionsvorhabens hat eine Firma einen Kredit von 200000 Euro aufgenommen, der bei dem sehr günstigen Zinssatz von $p = 5\%$ mittels Annuitätentilgung zurückgezahlt werden soll.

a) Welche jährliche Zahlung ist bei $n = 8$ Jahren Laufzeit aufzubringen. Erstellen Sie mit Exel einen passenden Tilgungsplan und bestimmen Sie zur Kontrolle die jährliche Annuität mit Hilfe einer Zielwertsuche.

Jahr t	Restschuld S_{t-1} zu Jahresbeginn	Annuität A_t	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Tilgung $T_t = A_t - Z_t$	Restschuld S_t zu Jahresende
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					0
$\sum$	———				———

b) Welche monatliche Rate müßte man vorsehen, wenn die Zahlung jeweils am Monatsende erfolgte?

c) Der Gläubiger verlangt ein Aufgeld (Agio) von 2% der Tilgungsrate. Wie hoch ist jetzt die Annuität?

d) Wie ist die Laufzeit zu planen, wenn höchstens 2000 Euro monatlich nachschüssig gezahlt werden können?

e) Wie hoch ist die Monatsrate bei der unter d) bestimmten Laufzeit?

Ü.Fi.3.2: Für den Kauf einer Wohnung haben Sie

1) 600000 ATS bei einer Bausparkasse zu 6% und

2) 450000 ATS als Hypothekardarlehen zu 8% aufgenommen.

a) Welche vorschüssige monatliche Belastung muß für die Rückzahlung beider Darlehen bereitgestellt werden?

Nehmen Sie 20-jährige Laufzeit und jährliche Verzinsung an.

b) Nach 12 Jahren erben Sie 210000 ATS und wollen damit die monatlichen Belastungen reduzieren. Bestimmen Sie zuerst die Restschuld des Hypothekardarlehens nach 12 Jahren und anschließend die neue Monatsrate. Wieviel ersparen Sie sich dadurch an Zinsen?

c) Ihre $80m^2$ Wohnung wird mit 7500 ATS/ m^2 wohnbaugefördert. Sie erhalten also zusätzlich ein Wohnbauförderungsdarlehen von 600000 ATS, für Ihre 2 Kinder erhalten Sie zusätzlich je 30000 ATS Wohnbauförderungsdarlehen. Erstellen Sie einen jährlichen Tilgungsplan, wenn im 1.-10. Jahr $p_1 = 0{,}5\%$, 11.-15. Jahr $p_2 = 1\%$, 16.-20. Jahr $p_3 = 2\%$, 21.-25. Jahr $p_4 = 4\%$ und ab dem 25. Jahr $p_5 = 6\%$ Zinsen zu bezahlen ist und die Annuität 1%, 2%, 4%, 8%, 12% der Gesamtsumme beträgt.

d) Wieviel an Eigenmittel müssen Sie zur Verfügung haben für Bausparer (40% der Vertragssumme, 60% der Vertragssumme ist das aufgeliehene Geld) und Grundkostenanteil (240000 ATS). Wieviel kostet die Wohnung insgesamt? Wie hoch ist der Quadratmeterpreis?

Ü.Fi.3.3: Sie benötigen zur Abwicklung eines Projektes noch dringend 160000 Euro. Sie haben die Möglichkeit EU-Fördermittel in Anspruch zu nehmen mit $p = 6\%$ jährlicher Verzinsung. Sie persönlich können 2100 Euro monatliche Belastung verkraften. Sollen Sie bei einer Laufzeit von $n=8$ Jahren die EU-Fördermittel in Anspruch nehmen?

Ü.Fi.3.4: a) Zahlen Sie den Kredit aus Ü.Fi.3.1.a) mittels Ratentilgung zurück. Erstellen Sie mit Excel einen passenden Tilgungsplan und vergleichen Sie diesen mit dem Tilgungsplan der Annuitätentilgung.

Jahr t	Restschuld S_{t-1} zu Jahresbeginn	Annuität $A_t = T_t + Z_t$	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Tilgung $T_t = \frac{S_0}{n}$	Restschuld S_t zu Jahresende
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					0
$\sum$	———				———

b) Wie ändert sich der Tilgungsplan, wenn der Gläubiger ein Aufgeld (Agio) von 2% der Tilgungsrate verlangt?

c) Wie ändert sich der Tilgungsplan von a), wenn Sie die Möglichkeit von 2 Jahren tilgungsfreier Zeit (Sie zahlen dann nur die Zinsen) in Anspruch nehmen?

Lösungen zu den Übungen Finanzmathematik 3: Tilgungsrechnung

Ü.Fi.3.1: $S_0 = 200000$ $p = 5\%$ $q = 1{,}05$

a) $n = 8$ jährliche Zahlung

$$S_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \rightarrow A = S_0 \frac{(q-1)q^n}{q^n - 1} = S_0 \cdot ANNF = 30944{,}36$$

Tilgungsplan:

Jahr t	Restschuld S_{t-1} zu Jahresbeginn	Annuität A_t	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Tilgung $T_t = A_t - Z_t$	Restschuld S_t zu Jahresende
1	200000,00	30944,36	10000,00	20944,36	179055,64
2	179055,64	30944,36	8952,78	21991,58	157064,06
3	157064,06	30944,36	7853,20	23091,16	133972,90
4	133972,90	30944,36	6698,64	24245,72	109727,18
5	109727,18	30944,36	5486,36	25458,00	84269,18
6	84269,18	30944,36	4213,46	26730,90	57538,28
7	57538,28	30944,36	2876,91	28067,45	29470,83
8	29470,83	30944,36	1473,54	29470,83	0,00
Σ	————	247554,89	47554,89	200000,00	————

b) $A_{konf} = a\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r - 1)\right)$ bei nachschüssig unterjährliche Rentenzahlungen

$$a = \frac{A_{konf}}{m_r + \frac{p}{2}(m_r - 1)} = \frac{30944{,}36}{12 + \frac{0{,}05}{2} \cdot 11} = 2520{,}93$$

c) Annuitätstilgung mit Aufgeld (Agio) von $\alpha = 2\% = 0{,}02$ der Tilgungsrate

$$A_t = Z_t + T_t + \underbrace{\alpha \cdot T_t}_{Aufgeld} = Z_t + (1+\alpha)T_t$$

$$S_1 = S_0 - T_1 = S_0 - \frac{A_1 - Z_1}{1+\alpha} = S_0\left(1 + \frac{p}{1+\alpha}\right) - A_1 \cdot \frac{1}{1+\alpha}$$

$$S_2 = S_1 - T_2 = S_1 - \frac{A_2 - Z_2}{1+\alpha} \underset{Z_2 = p \cdot S_1}{\underset{\uparrow}{=}} S_1\left(1 + \frac{p}{1+\alpha}\right) - A_2 \frac{1}{1+\alpha} =$$

$$= S_0\left(1 + \frac{p}{1+\alpha}\right)^2 - \frac{1}{1+\alpha}\left[A_1\left(1 + \frac{p}{1+\alpha}\right) + A_2\right] = S_0 q^{*2} - \frac{1}{1+\alpha}\left[A_1 q^* + A_2\right]$$

mit $q^* = 1 + \frac{p}{1+\alpha}$

$$S_t = S_0 q^{*t} - \frac{1}{1+\alpha}\left[A_1 q^{*t-1} + A_2 q^{*t-2} + \ldots + A_t\right]$$

$$S_n = 0 \text{ für } n = 8 \Rightarrow S_0 q^{*n} = \frac{1}{1+\alpha}\sum_{t=1}^{n} A_t (q^*)^{n-t}$$

$$S_0 = \frac{1}{1+\alpha}\sum_{t=1}^{n}\frac{A_t}{q^{*t}} \text{ mit } q^* = 1 + \frac{p}{1+\alpha}$$

Annuitätentilgung $\Rightarrow A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$

$$S_0 = \frac{1}{1+\alpha} A \cdot \left[\frac{1}{q^*} + \frac{1}{q^{*2}} + \ldots + \frac{1}{q^{*n-1}}\right] = \frac{1}{1+\alpha} A \cdot \frac{1}{q^*} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{q^*}\right)^n}{1-\frac{1}{q^*}} = \frac{1}{1+\alpha} A \cdot \frac{1}{q^{*n}} \cdot \frac{q^{*n}-1}{q^*-1}$$

Vergleich ohne/mit Aufgeld:

$$S_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \text{ ohne Agio}$$

$$S_0 q^{*n} = \frac{1}{1+\alpha} A \cdot \frac{q^{*n}-1}{q^*-1} \text{ mit Agio}$$

$$q^* = 1 + \frac{p}{1+\alpha}$$

Zahlenwerte: $q^* = 1 + \frac{p}{1+\alpha} = 1 + \frac{0{,}05}{1{,}02} = 1{,}04902$

$$A = S_0(1+\alpha)\frac{q^{*n}\left(q^*-1\right)}{q^{*n}-1} = 31438{,}279$$

d) $a = \leq 2000 \Rightarrow A_{konf} = a\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r - 1)\right) \leq 24550$

$$S_0 q^n = A \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \Rightarrow \frac{S_0(q-1)}{A} = \frac{q^n-1}{q^n} = 1 - \frac{1}{q^n}$$

$$-\frac{S_0(q-1)}{A} + 1 = \frac{1}{q^n}$$

$$\ln\left(1 - \frac{S_0(q-1)}{A}\right) = \ln 1 - n \cdot \ln q$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{S_0(0-1)}{A}\right)}{\ln q} = 10{,}72 \text{ Jahre} \rightarrow \text{ Laufzeit 10 Jahre 9 Monate}$$

e) $n_1 = int(n) = 10$

$m_r = 12 \qquad \tilde{m} = 9$ Monate im letzten Jahr

$$S_{n1} = S_0 \cdot q^{n1} - A_{kon}\left[1+q+q^2+...+q^{n_1-1}\right] = S_0 q^{n_1} - A_{konf} \cdot \frac{q^{n_1}-1}{q-1} \text{ Schuld}$$

nach der vorletzten Verzinsung mit $A_{konf} = a\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r - 1)\right)$

In der letzten Zinsperiode erfolgen nur mehr $\tilde{m} < m_r$ Zahlungen in der Höhe a.

$$S_n = \underbrace{S_{n_1} \cdot \left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} \cdot p\right)}_{\text{einfache anteilige Zinsen}} - \underbrace{a\left(1 + \frac{0}{m_r} p\right)}_{\text{letzteRate}} - a\left(1 + \frac{1}{m_r} p\right) - ... - \underbrace{a\left(1 + \frac{\tilde{m}_r - 1}{m_r} p\right)}_{\text{1. Rate im letzten Jahr}} =$$

$$= S_{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) - a \cdot \tilde{m}_r - \frac{a \cdot p}{m_r} \underbrace{\left(0 + 1 + ...(\tilde{m}_r - 1)\right)}_{\frac{\tilde{m}_r \cdot (\tilde{m}_r - 1)}{2}}$$

$$\Rightarrow S_n = S_{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) - a\left(\tilde{m}_r + \frac{p}{m_r} \frac{\tilde{m}_r \cdot (\tilde{m}_r - 1)}{2}\right) =$$

$$= \left(S_0 q^{n_1} - a\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r - 1)\right) \cdot \frac{q^{n_1}-1}{q-1}\right)\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) - a\left(\tilde{m}_r + \frac{p}{m_r} \cdot \frac{\tilde{m}_r(\tilde{m}_r - 1)}{2}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$S_0 q^{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) = a \cdot \left[\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r - 1)\right)\frac{q^{n_1}-1}{q-1} \cdot \left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) + \tilde{m}_r + \frac{p}{m_r} \frac{\tilde{m}_r(\tilde{m}_r - 1)}{2}\right]$$

$$a = \frac{S_0 q^{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right)}{\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r - 1)\right)\frac{q^{n_1}-1}{q-1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) + \tilde{m}_r + \frac{p}{m_r} \frac{\tilde{m}_r(\tilde{m}_r - 1)}{2}} = 1996{,}04$$

Ü.Fi.3.2: a) 1. Bausparer $S_0 = 600000 \qquad p = 6\%$ jährliche Verzinsung, n=20

$$S_0 \cdot q^n = A_{konf} \frac{q^n - 1}{q-1} \to A_{konf} = S_0 \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} = 52310{,}73$$

$A_{konf} = a_{BS}\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)\right)$ bei vorschüssiger monatlicher Bezahlung

$a_{BS} = \dfrac{A_{konf}}{m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)} = 4222{,}01$ ATS monatlich vorschüssig für Bausparer

2. Hypothekardarlehen $S_0 = 450000$ $p=8\%$

$$A_{konf} = S_0 \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} = 45833{,}49$$

$$a_{Hyp} = \frac{A_{konf}}{m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)} = 3660{,}82 \text{ ATS monatlich vorschüssig}$$

Bausparer + Hypo $a_{ges} = 7882{,}83$ ATS monatlich

b) Restschuld des Hypothekardarlehens nach 12 Jahren

$$S_k = S_0 \frac{q^n - q^k}{q^n - 1} = 450000 \cdot \frac{1{,}08^{20} - 1{,}08^{12}}{1{,}08^{20} - 1} = 263388{,}54$$

neue Anfangsschuld $S_0^* = 263388{,}54 - 210000 = 53388{,}54$

Laufzeit $n^* = 8$ Jahre

$$A_{konf}^* = S_0^* \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} = 9290{,}39$$

$$a_{Hyp}^* = \frac{A_{konf}^*}{m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)} = 742{,}04 \text{ monatlich vorschüssig}$$

Bausparer + Hypo $a_{ges}^* = 4964{,}05$ ATS monatlich die letzten 8 Jahre

Zinsersparnis: Gesamtzahlung Hypo ohne 210000 Rückzahlung:

$$a \cdot m_r \cdot n = 3660{,}82 \cdot 12 \cdot 20 = 878596{,}80$$

Gesamtzahlung Hypo mit 210000 Rückzahlung:

$$3660{,}82 \cdot 12 \cdot 12 + 210000 + 742{,}04 \cdot 12 \cdot 8 = 808393{,}92$$

Zinsersparnis $878596{,}80 - 808393{,}92 = 70202{,}88$

c) Wohnbauförderungsdarlehen: $S_0 = 660000\ ATS$ ($80m^2$ +2 Kinder)

1. 1.-10. Jahr: $A_1 = 1\%$ von $S_0 = 6600$ ATS/Jahr

$p_1 = 0{,}5\%$ $q_1 = 1{,}005$

$$S_k = S_0 q_1^k - A_1\left(1 + q_1 + q_1^2 + \ldots q_1^{k-1}\right) = S_0 q_1^k - A_1 \frac{q_1^k - 1}{q_1 - 1} \underset{\substack{k=10 \\ q_1=1{,}005}}{=} 626247{,}51$$

2. 11.-15. Jahr: $A_2 = 2\%$ von $S_0 = 13200$ ATS/Jahr

$p_2 = 1\%$ $q_2 = 1{,}01$

Laufzeit $k = 5$ Jahre $\tilde{S}_0 = S_{10} = 626247{,}51$

$$S_k = \tilde{S}_0 q_2^k - A_2\left(1 + q_2 + q_2^2 + \ldots q_2^{k-1}\right) = \tilde{S}_0 q_2^k - A_2 \frac{q_2^k - 1}{q_2 - 1} = 590859{,}16$$

3. 16.-20. Jahr: $A_3 = 4\%$ von $S_0 = 26400$ ATS/Jahr

$p_3 = 2\%$ $q_3 = 1{,}02$

Laufzeit: $k = 5$ Jahre $\tilde{S}_0 = 590859{,}16$

$$S_k = \tilde{S}_0 q_3^k - A_3\left(1 + q_3 + q_3^2 + \ldots q_3^{k-1}\right) = \tilde{S}_0 q_3^k - A_3 \frac{q_3^k - 1}{q_3 - 1} = 514969{,}60$$

4. 21.-25. Jahr: $A_4 = 8\%$ von $S_0 = 52800$ ATS/Jahr

$p_4 = 4\%$ $q_4 = 1{,}04$

Laufzeit $k = 5$ Jahre $\tilde{S}_0 = 514969{,}60$

$$S_k = \tilde{S}_0 q_4^k - A_4\left(1 + q_4 + q_4^2 + \ldots + q_4^{k-1}\right) = \tilde{S}_0 q_4^k - A_4 \frac{q_4^k - 1}{q_4 - 1} = 340557{,}43$$

5. ab dem 25. Jahr $A_5 = 12\%$ von $S_0 = 79200$ ATS/Jahr

$p_5 = 6\%$ $q_5 = 1{,}06$

Laufzeit: k noch unbekannt $\tilde{S}_0 = 340557{,}43$

$$S_k = \tilde{S}_0 q_5^k - A_5\left(1 + q_5 + q_5^2 + \ldots + q_5^{k-1}\right) = \tilde{S}_0 q_5^k - A_5 \frac{q_5^k - 1}{q_5 - 1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\tilde{S}_0 q_5^k = A_5 \frac{q_5^k - 1}{q_5 - 1}$$

$$\frac{\tilde{S}_0}{A_5}(q_5 - 1) = 1 - \frac{1}{q_5^k}$$

$$\frac{1}{q_5^k} = 1 - \frac{\tilde{S}_0}{A_5}(q_5 - 1)$$

$$\underbrace{\ln 1}_{\text{„}0\text{“}} - k \ln q_5 = \ln\left(1 - \frac{\tilde{S}_0}{A_5}(q_5 - 1)\right)$$

$$k = -\frac{\ln\left(1 - \frac{\tilde{S}_0}{A_5}(q_5 - 1)\right)}{\ln q_5} = 5{,}12 \text{ Jahre}$$

$k=5$ Zahlungen von $A_5 = 79200$ ATS am Jahresende

$$S_5 = \tilde{S}_0 q_5^k - A_5 \frac{q_5^k - 1}{q_5 - 1} = 9284{,}90$$

im 6. Jahr (insgesamt 31. Jahr) Restzahlung $S_5 + S_5 \cdot p_5 = S_5 \cdot q_5 = 9842{,}00$ am Jahresende.

d) Bauspardarlehen: $S_0 = 600000 \mathrel{\hat=} 60\%$ der Vertragssumme

$\Rightarrow 40\% \mathrel{\hat=} 400000$ an Eigenmittel erforderlich

Grundkostenanteil: 240000 ATS $\Rightarrow$ 640000 ATS Eigenmittel erforderlich.

Wohnungkosten:	
Eigenmittel	640000
Bausparer	600000
Hypothekardarlehen	450000
Wbf	660000
	2350000

Quadratmeterpreis: $\dfrac{2350000\,ATS}{80m^2} = 29375\ ATS/m^2$

Ü.Fi.3.3: $S_0 = 160000$ $p=6\%$ $q=1{,}06$ $n=8$

$$S_0 \cdot q^n = A_{konf} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$A_{konf} = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 25765{,}75 \text{ konforme nachschüssige Jahresrente}$$

monatliche vorschüssige Zahlungen a

$$A_{konf} = a\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)\right)$$

$$a = \frac{A_{konf}}{m_r + \frac{p}{2}(m_r+1)} = \frac{25765{,}75}{12 + \frac{0{,}06}{2} \cdot 13} = 2079{,}56 \text{ Euro monatlich vorschüssig}$$

$\rightarrow$ Nehmen Sie die EU-Förderung in Anspruch! p=6% ist ein günstiger Zinssatz.

Ü.Fi.3.4: a) $S_0 = 200000 \qquad p{=}5\%, \quad n{=}8$

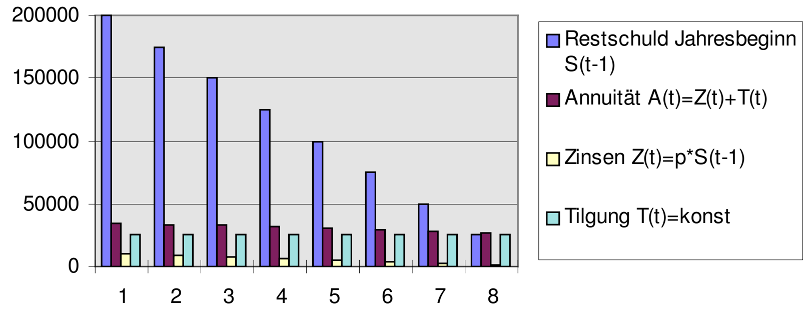
Ratentilgung: $T_1 = T_2 = \ldots T_n = T = \dfrac{S_0}{n} = \dfrac{200000}{8} = 25000$ Euro

$$S_k = S_0 - k \cdot T \qquad k = 1,2,\ldots n$$

$$Z_k = p \cdot S_{k-1} = p\left(S_0 - (k-1)\cdot\frac{S_0}{n}\right) = pS_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$A_k = Z_k + T = pS_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \frac{S_0}{n} = S_0\left[p\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right]$$

Tilgungsplan siehe Exelsheet TILGUNG.XLS



$$Z_1 = p \cdot S_0 = 10000$$

$$A_1 = T + Z_1 = 35000$$

$$Z_n = p \cdot S_{n-1} = p \cdot S_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 10000\left(1 - \frac{7}{8}\right) = 1250$$

$$A_n = T + Z_n = 26250$$

b) mit Aufgeld (Agio) von 2% der Tilgungsrate:

$$T = \frac{S_0}{n} = \text{konstant}$$

$$S_k = S_0 - k \cdot T$$

$$Z_k = p \cdot S_{k-1} = p\left(S_0 - (k-1)\cdot\frac{S_0}{n}\right) = pS_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad \text{wie gehabt}$$

$$A_k = T + Z_k + \underbrace{\alpha \cdot T}_{Aufgeld} = Z_k + (1+\alpha)\cdot T = pS_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + (1+\alpha)\frac{S_0}{n}$$

$$A_k = S_0\left[p\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + (1+\alpha)\cdot\frac{1}{n}\right]$$

$$S_0 = 200000 \qquad p{=}5\% \qquad n{=}8$$

Tilgungsplan wie bei a) allerdings Annuität um $\alpha \cdot T = 0{,}02 \cdot 2500 = 500$ Euro höher. Vergleichen Sie Excelsheet TILGUNG.XLS.

c) 2 Jahre tilgungsfreie Zeit

(1) die ersten 2 Jahre tilgungsfreie Zeit $T = 0 \rightarrow A = Z = p \cdot S_0 = 10000$

(2) die restlichen 5 Jahre Verlauf wie bei a)