Lösungen zu den Übungen Finanzmathematik 3: Tilgungsrechnung

Ü.Fi.3.1: $S_0 ? 200000$ $\quad p ? 5\%$ $\quad q ? 1{,}05$

a) $n ? 8$ jährliche Zahlung

$$S_0 ?q^n ? A ?\frac{q^n ?1}{q ?1} ? \quad A ? S_0 \frac{?q ?1?q^n}{q^n ?1} ? S_0 ?ANNF ? 30944{,}36$$

Tilgungsplan:

Jahr t	Restschuld $S_{t?1}$ zu Jahresbeginn	Annuität A_t	Zinsen $Z_t ? p ?S_{t?1}$	Tilgung $T_t ? A_t ? Z_t$	Restschuld S_t zu Jahresende
1	200000,00	30944,36	10000,00	20944,36	179055,64
2	179055,64	30944,36	8952,78	21991,58	157064,06
3	157064,06	30944,36	7853,20	23091,16	133972,90
4	133972,90	30944,36	6698,64	24245,72	109727,18
5	109727,18	30944,36	5486,36	25458,00	84269,18
6	84269,18	30944,36	4213,46	26730,90	57538,28
7	57538,28	30944,36	2876,91	28067,45	29470,83
8	29470,83	30944,36	1473,54	29470,83	0,00
?	____________	247554,89	47554,89	200000,00	____________

b) $A_{konf} ? a ?m_r ? \frac{p}{2} ?m_r ?1??$ bei nachschüssig unterjährliche Rentenzahlungen

$$a ? \frac{A_{konf}}{m_r ? \frac{p}{2}?m_r ?1?} ? \frac{30944{,}36}{12 ? \frac{0{,}05}{2}?11} ? 2520{,}93$$

c) Annuitätstilgung mit Aufgeld (Agio) von $? ? 2\% ? 0{,}02$ der Tilgungsrate

$$A_t ? Z_t ? T_t ? \underbrace{??T_t}_{Aufgeld} ? Z_t ? ?1 ? ??T_t$$

$$S_1 ? S_0 ? T_1 ? S_0 ? \frac{A_1 ? Z_1}{1 ? ?} ? S_0 ?1 ? \frac{p}{1 ? ?}? ? A_1 ?\frac{1}{1 ? ?}$$

$$S_2 ? S_1 ? T_2 ? S_1 ? \frac{A_2 ? Z_2}{1 ? ?} \underset{Z_2 ? p?S_1}{?} S_1 ?1 ? \frac{p}{1 ? ?}? ? A_2 \frac{1}{1 ? ?} ?$$

$$? S_0 ?1 ? \frac{p}{1 ? ?}?^2 ? \frac{1}{1 ? ?}?A_1 ?1 ? \frac{p}{1 ? ?}? ? A_2? ? S_0 q^{*2} ? \frac{1}{1 ? ?}?A_1 q^* ? A_2?$$

mit $q^* ? 1 ? \frac{p}{1 ? ?}$

$$S_t \;?\; S_0 q^{*t} \;?\; \frac{1}{1??} ?A_1 q^{*t?1} \;?\; A_2 q^{*t?2} \;?...?\; A_t ?$$

$S_n \;?\; 0$ für $n \;?\; 8 \;?\quad S_0 q^{*n} \;?\; \frac{1}{1??} \overset{n}{\underset{t?1}{?}} A_t (q^*)^{n?t}$

$$S_0 \;?\; \frac{1}{1??} \overset{n}{\underset{t?1}{?}} \frac{A_t}{q^{*t}} \quad \text{mit } q^* \;?\; 1 ? \frac{p}{1??}$$

Annuitätentilgung ? $\quad A_1 \;?\; A_2 \;?...?\; A_n \;?\; A$

$$S_0 \;?\; \frac{1}{1??} A ?? \frac{1}{q^*} ? \frac{1}{q^{*2}} ?...? \frac{1}{q^{*n?1}} ?? \;?\; \frac{1}{1??} A ?\frac{1}{q^*} ? \frac{1 ? ?\frac{1}{q^*}?^n}{1 ? \frac{1}{q^*}} \;?\; \frac{1}{1??} A ?\frac{1}{q^{*n}} ? \frac{q^{*n} ? 1}{q^* ? 1}$$

Vergleich ohne/mit Aufgeld:

$S_0 ?q^n \;?\; A ?\frac{q^n ? 1}{q ? 1}$ ohne Agio $\qquad S_0 q^{*n} \;?\; \frac{1}{1??} A ?\frac{q^{*n} ? 1}{q^* ? 1}$ mit Agio

$$q^* \;?\; 1 ? \frac{p}{1??}$$

Zahlenwerte: $\quad q^* \;?\; 1 ? \frac{p}{1??} \;?\; 1 ? \frac{0{,}05}{1{,}02} \;?\; 1{,}04902$

$$A \;?\; S_0 ?1 ?? ?\frac{q^{*n} ?q^* ? 1?}{q^{*n} ? 1} \;?\; 31438{,}279$$

d) $\quad a \;??\; 2000 \;?\quad A_{konf} \;?\; a ?m_r ? \frac{p}{2} ?m_r ? 1?? \;?\; 24550$

$$S_0 q^n \;?\; A ?\frac{q^n ? 1}{q ? 1} \;?\quad \frac{S_0 ?q ? 1?}{A} \;?\; \frac{q^n ? 1}{q^n} \;?\; 1 ? \frac{1}{q^n}$$

$$? \frac{S_0 ?q ? 1?}{A} \;?\; 1 ? \frac{1}{q^n}$$

$$\ln ?1 ? \frac{S_0 ?q ? 1?}{A} ? \;?\; \ln 1 ? n ?\ln q$$

$$n \;??\; \frac{\ln ?1 ? \frac{S_0 ?0 ? 1?}{A} ?}{\ln q} \;?\; 10{,}72 \text{ Jahre} \;?$$ Laufzeit 10 Jahre 9 Monate

e) $n_1 = int(n) = 10$

$m_r = 12$ $\qquad \tilde{m} = 9$ Monate im letzten Jahr

$S_{n1} = S_0 \cdot q^{n1} - A_{kon}\left(1 + q + q^2 + \dots + q^{n_1-1}\right) = S_0 q^{n_1} - A_{konf} \cdot \frac{q^{n_1} - 1}{q - 1}$ Schuld

nach der vorletzten Verzinsung mit $A_{konf} = a\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)\right)$

In der letzten Zinsperiode erfolgen nur mehr $\tilde{m} < m_r$ Zahlungen in der Höhe a.

$$S_n = \underbrace{S_{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right)}_{\text{einfache anteilige Zinsen}} - \underbrace{a\left(1 + \frac{0}{m_r} p\right)}_{\text{letzteRate}} - a\left(1 + \frac{1}{m_r} p\right) - \dots - \underbrace{a\left(1 + \frac{\tilde{m}_r - 1}{m_r} p\right)}_{\text{1. Rate im letzten Jahr}} =$$

$$= S_{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) - a \cdot \tilde{m}_r - \frac{a \cdot p}{m_r}\underbrace{\left(0 + 1 + \dots + (\tilde{m}_r - 1)\right)}_{\frac{\tilde{m}_r(\tilde{m}_r - 1)}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad S_n = S_{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) - a\left(\tilde{m}_r + \frac{p}{m_r}\frac{\tilde{m}_r(\tilde{m}_r - 1)}{2}\right) =$$

$$= \left(S_0 q^{n_1} - a\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)\right)\frac{q^{n_1} - 1}{q - 1}\right)\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) - a\left(\tilde{m}_r + \frac{p}{m_r}\frac{\tilde{m}_r(\tilde{m}_r - 1)}{2}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$S_0 q^{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) = a\left[\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)\right)\frac{q^{n_1} - 1}{q - 1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) + \tilde{m}_r + \frac{p}{m_r}\frac{\tilde{m}_r(\tilde{m}_r - 1)}{2}\right]$$

$$a = \frac{S_0 q^{n_1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right)}{\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)\right)\frac{q^{n_1} - 1}{q - 1}\left(1 + \frac{\tilde{m}_r}{m_r} p\right) + \tilde{m}_r + \frac{p}{m_r}\frac{\tilde{m}_r(\tilde{m}_r - 1)}{2}} = 1996{,}04$$

Ü.Fi.3.2: a) 1. Bausparer $S_0 = 600000$ $\quad p = 6\%$ jährliche Verzinsung, $n=20$

$$S_0 \cdot q^n = A_{konf}\frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow A_{konf} = S_0\frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1} = 52310{,}73$$

$A_{konf} = a_{BS}\left(m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)\right)$ bei vorschüssiger monatlicher Bezahlung

$a_{BS} = \frac{A_{konf}}{m_r + \frac{p}{2}(m_r + 1)} = 4222{,}01$ ATS monatlich vorschüssig für Bausparer

2. Hypothekardarlehen $S_0 \; ? \; 450000$ $p = 8\%$

$$A_{konf} \; ? \; S_0 \frac{q^n ?q ? 1?}{q^n \; ? 1} \; ? \; 45833{,}49$$

$$a_{Hyp} \; ? \; \frac{A_{konf}}{m_r \; ? \; \frac{p}{2} ?m_r \; ? 1?} \; ? \; 3660{,}82 \text{ ATS monatlich vorschüssig}$$

Bausparer + Hypo $a_{ges} \; ? \; 7882{,}83$ ATS monatlich

b) Restschuld des Hypothekardarlehens nach 12 Jahren

$$S_k \; ? \; S_0 \frac{q^n \; ? \; q^k}{q^n \; ? \; 1} \; ? \; 450000 \, ? \frac{1{,}08^{20} \; ? \; 1{,}08^{12}}{1{,}08^{20} \; ? \; 1} \; ? \; 263388{,}54$$

neue Anfangsschuld $S_0^* \; ? \; 263388{,}54 \; ? \; 210000 \; ? \; 53388{,}54$

Laufzeit $n^* \; ? \; 8$ Jahre

$$A_{konf}^{\;*} \; ? \; S_0^{\;*} \frac{q^n ?q ? 1?}{q^n \; ? 1} \; ? \; 9290{,}39$$

$$a^*_{Hyp} \; ? \; \frac{A_{konf}^{\;*}}{m_r \; ? \; \frac{p}{2} ?m_r \; ? 1?} \; ? \; 742{,}04 \text{ monatlich vorschüssig}$$

Bausparer + Hypo $a^*_{ges} \; ? \; 4964{,}05$ ATS monatlich die letzten 8 Jahre

Zinsersparnis: Gesamtzahlung Hypo ohne 210000 Rückzahlung:

$a ?m_r ?n \; ? \; 3660{,}82 ?12 ?20 \; ? \; 878596{,}80$

Gesamtzahlung Hypo mit 210000 Rückzahlung:

$3660{,}82 ?12 ?12 \; ? \; 210000 \; ? \; 742{,}04 ?12 ?8 \; ? \; 808393{,}92$

Zinsersparnis $878596{,}80 \; ? \; 808393{,}92 \; ? \; 70202{,}88$

c) Wohnbauförderungsdarlehen: $S_0 \; ? \; 660000 \; ATS$ $(80m^2$ +2 Kinder)

1. 1.-10. Jahr: $A_1 \; ? \; 1\%$ von $S_0 \; ? \; 6600$ ATS/Jahr

$p_1 \; ? \; 0{,}5\%$ $q_1 \; ? \; 1{,}005$

$$S_k \; ? \; S_0 q_1^k \; ? \; A_1 ?1 ? \; q_1 \; ? \; q_1^2 \; ? \ldots q_1^{k?1} ? ? \; S_0 q_1^k \; ? \; A_1 \frac{q_1^k \; ? \; 1}{q_1 \; ? \; 1} \underset{\substack{k?10 \\ q_1?1{,}005}}{?} 626247{,}51$$

2. 11.-15. Jahr: $A_2 = 2\%$ von $S_0 = 13200$ ATS/Jahr

$p_2 = 1\%$ $\quad q_2 = 1{,}01$

Laufzeit $k = 5$ Jahre $\quad \tilde{S}_0 = S_{10} = 626247{,}51$

$$S_k = \tilde{S}_0 q_2^k - A_2\left(1 + q_2 + q_2^2 + \ldots q_2^{k-1}\right) = \tilde{S}_0 q_2^k - A_2 \frac{q_2^k - 1}{q_2 - 1} = 590859{,}16$$

3. 16.-20. Jahr: $A_3 = 4\%$ von $S_0 = 26400$ ATS/Jahr

$p_3 = 2\%$ $\quad q_3 = 1{,}02$

Laufzeit: $k = 5$ Jahre $\quad \tilde{S}_0 = 590859{,}16$

$$S_k = \tilde{S}_0 q_3^k - A_3\left(1 + q_3 + q_3^2 + \ldots q_3^{k-1}\right) = \tilde{S}_0 q_3^k - A_3 \frac{q_3^k - 1}{q_3 - 1} = 514969{,}60$$

4. 21.-25. Jahr: $A_4 = 8\%$ von $S_0 = 52800$ ATS/Jahr

$p_4 = 4\%$ $\quad q_4 = 1{,}04$

Laufzeit $k = 5$ Jahre $\quad \tilde{S}_0 = 514969{,}60$

$$S_k = \tilde{S}_0 q_4^k - A_4\left(1 + q_4 + q_4^2 + \ldots + q_4^{k-1}\right) = \tilde{S}_0 q_4^k - A_4 \frac{q_4^k - 1}{q_4 - 1} = 340557{,}43$$

5. ab dem 25. Jahr $A_5 = 12\%$ von $S_0 = 79200$ ATS/Jahr

$p_5 = 6\%$ $\quad q_5 = 1{,}06$

Laufzeit: k noch unbekannt $\tilde{S}_0 = 340557{,}43$

$$S_k = \tilde{S}_0 q_5^k - A_5\left(1 + q_5 + q_5^2 + \ldots + q_5^{k-1}\right) = \tilde{S}_0 q_5^k - A_5 \frac{q_5^k - 1}{q_5 - 1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\tilde{S}_0 q_5^k = A_5 \frac{q_5^k - 1}{q_5 - 1}$$

$$\frac{\tilde{S}_0}{A_5}\left(q_5 - 1\right) = 1 - \frac{1}{q_5^k}$$

$$\frac{1}{q_5^k} = 1 - \frac{\tilde{S}_0}{A_5}\left(q_5 - 1\right)$$

$$\underbrace{\ln 1}_{0} - k \ln q_5 = \ln\left(1 - \frac{\tilde{S}_0}{A_5}\left(q_5 - 1\right)\right)$$

$$k = -\frac{\ln\left(1 - \frac{\tilde{S}_0}{A_5}\cdot(q_5 - 1)\right)}{\ln q_5} = 5{,}12 \text{ Jahre}$$

$k=5$ Zahlungen von $A_5 = 79200$ ATS am Jahresende

$$S_5 = \tilde{S}_0 q_5^k - A_5 \frac{q_5^k - 1}{q_5 - 1} = 9284{,}90$$

im 6. Jahr (insgesamt 31. Jahr) Restzahlung $S_5 + S_5 \cdot p_5 = S_5 \cdot q_5 = 9842{,}00$ am Jahresende.

d) Bauspardarlehen: $S_0 = 600000 \mathrel{\hat{=}} 60\%$ der Vertragssumme

$\Rightarrow$ $40\% \mathrel{\hat{=}} 400000$ an Eigenmittel erforderlich

Grundkostenanteil: 240000 ATS $\Rightarrow$ 640000 ATS Eigenmittel erforderlich.

Wohnungkosten:

Eigenmittel	640000
Bausparer	600000
Hypothekardarlehen	450000
Wbf	660000
	2350000

Quadratmeterpreis: $\frac{2350000\,ATS}{80\,m^2} = 29375\ ATS\,/\,m^2$

Ü.Fi.3.3: $S_0 = 160000$ $p=6\%$ $q=1{,}06$ $n=8$

$$S_0 \cdot q^n = A_{konf} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$A_{konf} = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = 25765{,}75 \text{ konforme nachschüssige Jahresrente}$$

monatliche vorschüssige Zahlungen a

$$A_{konf} = a\left(m_r + \frac{p}{2}\cdot(m_r + 1)\right)$$

$$a = \frac{A_{konf}}{m_r + \frac{p}{2}\cdot(m_r + 1)} = \frac{25765{,}75}{12 + \frac{0{,}06}{2}\cdot 13} = 2079{,}56 \text{ Euro monatlich vorschüssig}$$

$\Rightarrow$ Nehmen Sie die EU-Förderung in Anspruch! $p=6\%$ ist ein günstiger Zinssatz.

Ü.Fi.3.4: a) $S_0 = 200000 \quad p=5\%, \quad n=8$

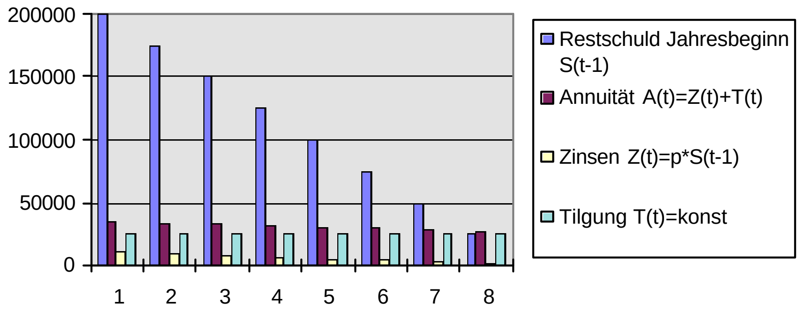
Ratentilgung: $T_1 = T_2 = \ldots T_n = T = \dfrac{S_0}{n} = \dfrac{200000}{8} = 25000$ Euro

$S_k = S_0 - k \cdot T \qquad k = 1,2,\ldots n$

$Z_k = p \cdot S_{k-1} = p\left(S_0 - (k-1)\dfrac{S_0}{n}\right) = pS_0\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$

$A_k = Z_k + T = pS_0\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) + \dfrac{S_0}{n} = S_0\left[p\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) + \dfrac{1}{n}\right]$

Tilgungsplan siehe Exelsheet TILGUNG.XLS



$Z_1 = p \cdot S_0 = 10000$

$A_1 = T + Z_1 = 35000$

$Z_n = p \cdot S_{n-1} = p \cdot S_0\left(1 - \dfrac{n-1}{n}\right) =$

$10000\left(1 - \dfrac{7}{8}\right) = 1250$

$A_n = T + Z_n = 26250$

b) mit Aufgeld (Agio) von 2% der Tilgungsrate:

$T = \dfrac{S_0}{n} = $ konstant

$S_k = S_0 - k \cdot T$

$Z_k = p \cdot S_{k-1} = p\left(S_0 - (k-1)\dfrac{S_0}{n}\right) = pS_0\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$ wie gehabt

$A_k = T + Z_k + \underbrace{0{,}02 \cdot T}_{Aufgeld} = Z_k + (1 + 0{,}02) \cdot T = pS_0\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) + (1 + 0{,}02)\dfrac{S_0}{n}$

$A_k = S_0\left[p\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) + (1 + 0{,}02)\dfrac{1}{n}\right]$

$S_0 = 200000 \qquad p=5\% \qquad n=8$

Tilgungsplan wie bei a) allerdings Annuität um $\Delta = 0{,}02 \cdot 2500 = 500$ Euro höher. Vergleichen Sie Excelsheet TILGUNG.XLS.

c) 2 Jahre tilgungsfreie Zeit

(1) die ersten 2 Jahre tilgungsfreie Zeit $T = 0 \Rightarrow A = Z = p \cdot S_0 = 10000$

(2) die restlichen 5 Jahre Verlauf wie bei a)