3. Tilgungsrechnung

3.1. Standardformen der Schuldentilgung

A_t Annuitäten	= Zahlung die der Schuldner am Ende des Jahres t an den Gläubigen leistet
$A_t = Z_t + T_t$	Annuität = Zinsen + Tilgung bei Standardbedingungen
$Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Zinslast bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung
$S_t = S_{t-1} - T_t$	Schuldenlast wird um Tilgung verkleinert

Vergleich mit nachschüssiger Rente bei jährlicher Verzinsung:

$$R_0 = \sum_{t=1}^{n} r_t \frac{1}{q^t} \qquad \text{jetzt Anfangsschuld } S_0 = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot \frac{1}{q^t}$$

Nochmalige Herleitung:

$$S_1 = S_0 - A_1 + Z_1 = S_0 - A_1 + p \cdot S_0 = S_0(1+p) - A_1$$

$$S_2 = S_1 - A_2 + Z_2 = S_1 - A_2 + p \cdot S_1 = S_1(1+p) - A_2 = S_0(1+p)^2 - A_1(1+p) - A_2$$

$$S_k = S_0(1+p)^k - A_1(1+p)^{k-1} - A_2(1+p)^{k-2} - \ldots - A_k = S_{k-1}(1+p) - A_k$$

$$S_k = S_0(1+p)^k - \sum_{t=1}^{k} A_t(1+p)^{k-t} = q^k\left(S_0 - \sum_{t=1}^{k} A_t \frac{1}{q^t}\right)$$

Schuld nach k-Jahren

$$S_n = 0 \rightarrow S_0 = \sum_{t=1}^{n} A_t \frac{1}{q^t}$$

Tilgung $\quad T_k = S_{k-1} - S_k = S_{k-1} - S_{k-1}(1+p) + A_k = A_k - S_{k-1} \cdot p$

$$T_k = A_k - pq^{k-1}\left(S_0 - \sum_{t=1}^{k-1} A_t \frac{1}{q^t}\right)$$

3.1.1. Annuitätentilgung $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$

$$S_0 = \sum_{t=1}^{n} A_t \frac{1}{q^t} = A\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + .. + \frac{1}{q^n}\right) = A \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = A \frac{q^n - 1}{(q-1)q^n}$$

$$\boxed{A = S_0 \cdot \frac{(q-1)q^n}{q^n - 1} = S_0 \cdot ANNF \qquad \text{Annuitätenfaktor}}$$

$$S_k = q^k\left(S_0 - A\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{q^t}\right) = q^k\left(S_0 - A\frac{1}{q}\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^k - 1}{\frac{1}{q} - 1}\right) = S_0 q^k - A\frac{q^k - 1}{q - 1} =$$

$$= S_0 q^k - S_0 \frac{(q-1)\cdot q^n}{q^n - 1} \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} = S_0\left(q^k - q^n \frac{q^k - 1}{q^n - 1}\right) = S_0 \frac{q^n - q^k}{q^n - 1}$$

$$\boxed{S_k = S_0 \frac{q^n - q^k}{q^n - 1} \quad \text{Schuld nach } k \text{ Jahren}}$$

Tilgung:

$$T_k = S_{k-1} - S_k = S_0 \cdot \frac{1}{q^n - 1}\left[\left(q^n - q^{k-1}\right) - \left(q^n - q^k\right)\right] = S_0 \frac{(q-1)q^{k-1}}{q^n - 1}$$

$$\boxed{T_k = S_0 \frac{(q-1)q^{k-1}}{q^n - 1} \qquad T_k = q \cdot T_{k-1} \quad \text{Tilgung bildet anwachsende geometrische Folge}}$$

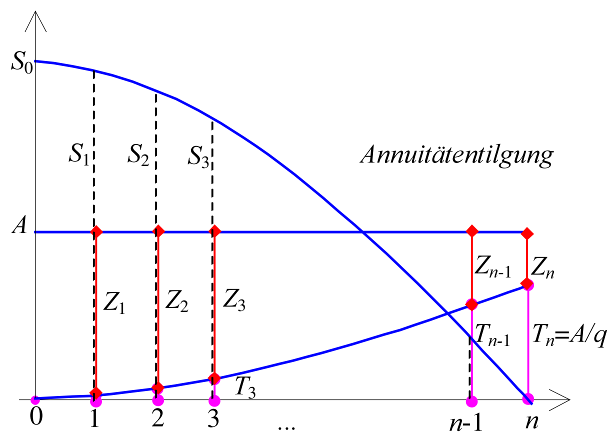
Laufzeit n: $A = S_0 \cdot \dfrac{(q-1)q^n}{q^n - 1}$

$$Aq^n - A = S_0(q-1)\cdot q^n$$

$$q^n\left(A - S_0(q-1)\right) = A$$

$$n = \frac{\log\frac{A}{A - S_0 \cdot p}}{\log(1+p)} = \frac{\log\frac{A}{A - S_0(q-1)}}{\log(q)}$$

Insgesamt bezahlt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = n \cdot A = S_0 \frac{(q-1)q^n}{q^n - 1} \cdot n$



Bsp: Firmenkredit $S_0 = 1$ Mill p=7,5%, n=6 Jahre

ges: Annuität, Tilgungsplan

$$A = S_0 \frac{(q-1)q^n}{q^n - 1} = 213044{,}89$$

$$Z_1 = p \cdot S_0 = 75000$$

$$T_1 = A - Z_1 = 138044{,}89 \ldots$$

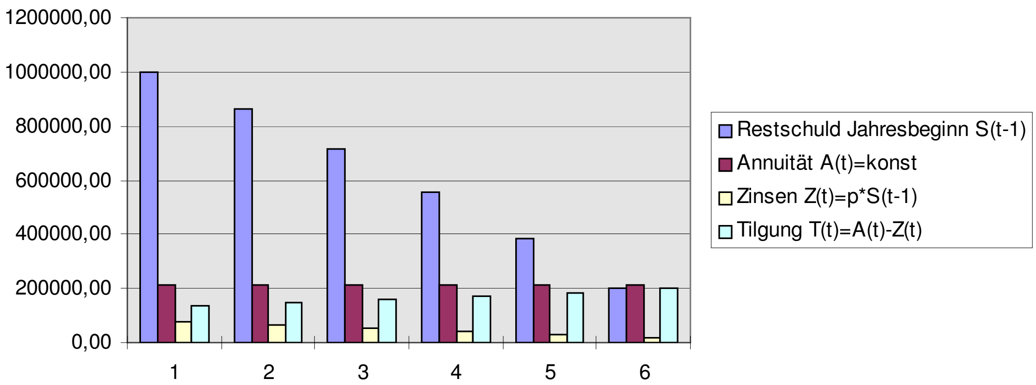
Jahr	Schulden des Vorjahres	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Annuität	Tilgung $T_t = A - Z_t$	Schulden am Jahresende $S_t = S_{t-1} - T_t$
1	100000,00	75000,00	213044,89	138044,89	861955,11
2	861955,11	64646,63	⋮	148398,26	713556,85
3	713556,85	53516,76	⋮	159528,13	554028,72
4	554028,72	41552,15	⋮	171492,74	382535,99
5	382535,99	28690,20	⋮	184354,69	198181,29
6	198181,29	14863,60	⋮	198181,29	0

Insgesamt bezahlt: $n \cdot A = 1278270$

<u>Lösung mit Excel-Zielwertsuche:</u>

Jahr t	Restschuld Jahresbeginn S(t-1)	Annuität A(t)=konst	Zinsen Z(t)=p*S(t-1)	Tilgung T(t)=A(t)-Z(t)	Restschuld Jahresende S(t)=S(t-1)-T(t)
1	1000000,00	213044,89	75000,00	138044,89	861955,11
2	861955,11	213044,89	64646,63	148398,26	713556,85
3	713556,85	213044,89	53516,76	159528,13	554028,72
4	554028,72	213044,89	41552,15	171492,74	382535,99
5	382535,99	213044,89	28690,20	184354,69	198181,29
6	198181,29	213044,89	14863,60	198181,29	0,00
	Insgesamt bezahlt:	1278269,35			

Zielzelle mit Zielwert 0



3.1.2. Ratentilgung

$T_1 = T_2 = \ldots T_n = T$

$$\boxed{S_0 = T_1 + T_2 + .. + T_n = n \cdot T \rightarrow \qquad T = \frac{S_0}{n} \qquad S_k = S_0 - k \cdot T}$$

$$S_1 = S_0 - A_1 + Z_1 = S_0 - A_1 + p \cdot S_0 = S_0(1+p) - A_1 = S_0 - T$$

$$A_1 = S_0 \cdot p + T = S_0\left(p + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_k = S_{k-1} - A_k + Z_k = S_{k-1} - A_k + p \cdot S_{k-1}$$

$$A_k = S_{k-1}(1+p) - S_k = [S_0 - (k-1) \cdot T](1+p) - (S_0 - k \cdot T) =$$

$$= S_0 \cdot p - T[(k-1)(1+p) - k] = S_0 \cdot p - T(-p + k \cdot p - 1) = S_0\left[p + \frac{p + 1 - k \cdot p}{n}\right]$$

$A_k = S_0\left[p\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\right]$ linear fallend mit k $\qquad A_1 = S_0\left(p + \frac{1}{n}\right)$, $\quad A_n = S_0 \cdot \left(\frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right)$

$A_k - A_{k-1} = -S_0 p \frac{k}{n} + S_0 p \frac{k-1}{n} = S_0 \frac{p}{n} = -T \cdot p$ jährliche Abnahme der Annuität

$Z_k = A_k - T = S_0\left[p\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{k}{n}\right)\right]$ ebenfalls linear fallend mit k $\qquad Z_1 = S_0 \cdot p$, $\quad Z_n = S_0 \cdot \frac{p}{n}$

Bemerkung:

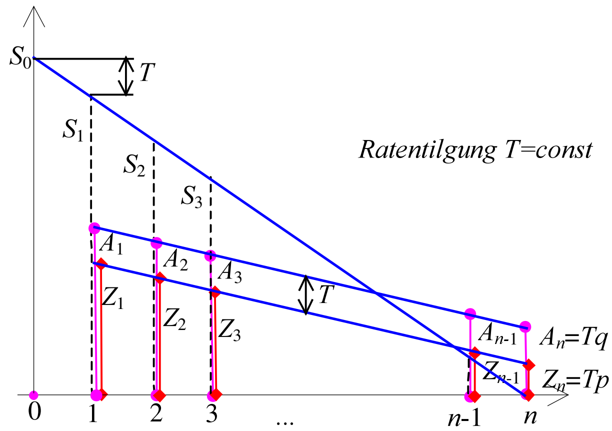
Diese Beziehungen können alternativ schneller hergeleitet werden mit:

$$T = \frac{S_0}{n} \qquad S_k = S_0 - k \cdot T$$

$$Z_k = p \cdot S_{k-1} = p(S_0 - (k-1) \cdot T) = pS_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Das ist die gleiche Beziehung wie oben hergeleitet.

$$A_k = Z_k + T = S_0\left(p - p \cdot \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n}\right)$$



Insgesamt bezahlt: $\sum_{k=1}^{n} A_k = S_0 pn - \frac{S_0 p}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{S_0 p}{n} n + S_0 \frac{1}{n} n = S_0 pn - \frac{S_0 p}{n} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + S_0 p + S_0 =$

$$= S_0\left(pn - \frac{p \cdot (n+1)}{2} + p + 1\right) = S_0\left(1 + \frac{p(n+1)}{2}\right)$$

Bsp: Firmenkredit $S_0 = 1$ Mill p=7,5% n=6 Jahre mittels Ratentilgung zu bezahlen

$$T = \frac{S_0}{n} = 166666{,}66$$

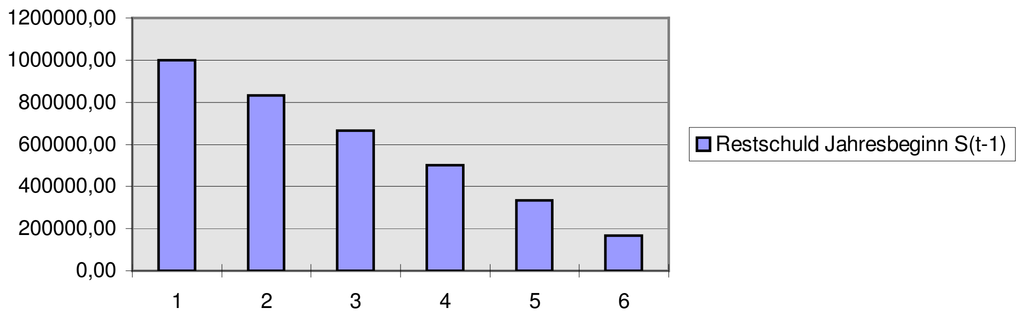
$T \cdot p = 12500$ jährliche Abnahme von Zinsen und Annuität

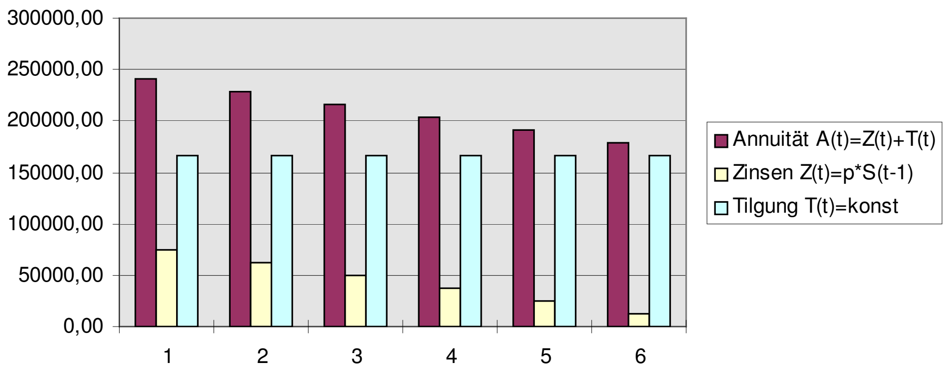
$$A_1 = S_0\left(p + \frac{1}{n}\right) = 241667$$

$$Z_1 = A_1 - T = S_0 \cdot p = 75000$$

Jahr	Schulden des Vorjahres	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Annuität $A_t = Z_t + T$	Tilgung $T = konst$	Schulden am Jahresende $S_t = S_{t-1} - T$
1	1000000,00	75000	241667	166666,66	833333,33
2	833333,33	62500	229167	⋮	666666,66
3	666666,66	50000	216667	⋮	500000,00
4	500000,00	37500	204167	⋮	333333,33
5	333333,33	25000	191667	⋮	166666,66
6	166666,66	12500	179167	⋮	0

insgesamt bezahlt: $S_0\left(1 + \frac{p(n+1)}{2}\right) = 1262500$, das ist weniger als beim Annuitätenkredit





3.2. Sonderformen von Schuldentilgung

3.2.1. Tilgungsfreie Zeiten

n_L	Laufzeit des Kredits
n_T	Tilgungsdauer
$n_L - n_T$	Jahre zu Beginn der Laufzeit ohne Tilgung (nur Zinsen zu bezahlen)

Bsp: Eine Stiftung hat einen Kredit über 5 Millionen S zu einem Zinssatz 5,375% aufgenommen. Laufzeit 7 Jahre, in den letzten 5 Jahren zu tilgen.

ges: Tilgungspläne bei a) Ratentilgung

b) Annuitätentilgung

a) b) bei ersten 2 Jahren tilgungsfrei $T = 0$

$$A = Z = p \cdot S_0 = 268750$$

a) <u>Ratentilgung</u> mit $n = n_T = 5$

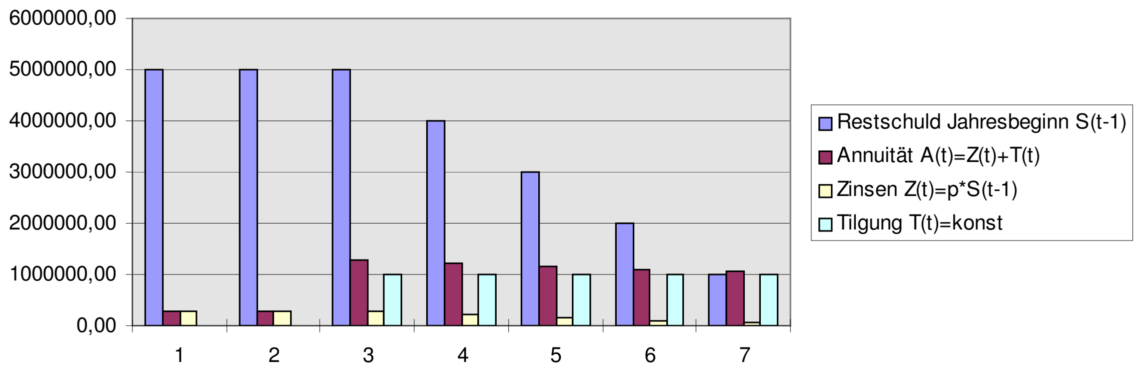
$$A_1 = S_0\left(p + \frac{1}{n_T}\right) = 1268750 \hat{=} A_3 \text{ im Tilgungsplan}$$

$$T = \frac{S_0}{n_T} = 1000000 \qquad A_{n_T} = S_0\left(\frac{p}{n_T} + \frac{1}{n_T}\right) = 1053750 \hat{=} A_7 \text{ im Tilgungsplan}$$

$$Z_1 = S_0 \cdot p = 268750 \hat{=} Z_3 \text{ im Tilgungsplan}$$

$$Z_{n_T} = \frac{S_0 \cdot p}{n_T} = T \cdot p = 53750 \hat{=} Z_7 \text{ im Tilgungsplan}$$

Jahr	n_T	Schulden des Vorjahres	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Annuität $A_t = Z_t + T$	Tilgung $T = konst$	Schulden Jahresende $S_t = S_{t-1} - T$
1		5000000,00	268750,00	268750,00	0,00	5000000,00
2		5000000,00	268750,00	268750,00	0,00	5000000,00
3	1	5000000,00	1268750,00	268750,00	1000000,00	4000000,00
4	2	4000000,00	1215000,00	215000,00	1000000,00	3000000,00
5	3	3000000,00	1161250,00	161250,00	1000000,00	2000000,00
6	4	2000000,00	1107500,00	107500,00	1000000,00	1000000,00
7	5	1000000,00	1053750,00	53750,00	1000000,00	0,00



b) Annuitätentilgung $n = n_T = 5$

$$A\frac{q^n-1}{q-1} = q^n \cdot S_0 \rightarrow A = \frac{q^n(q-1)}{q^n-1} \cdot S_0 = 1166871{,}51 \mathrel{\hat=} A_3 \text{ bis } A_7$$

Tilgungen bilden geometrische Folge

$$T_1 = S_0 \frac{(q-1)}{(q^n-1)} = 898121{,}51$$

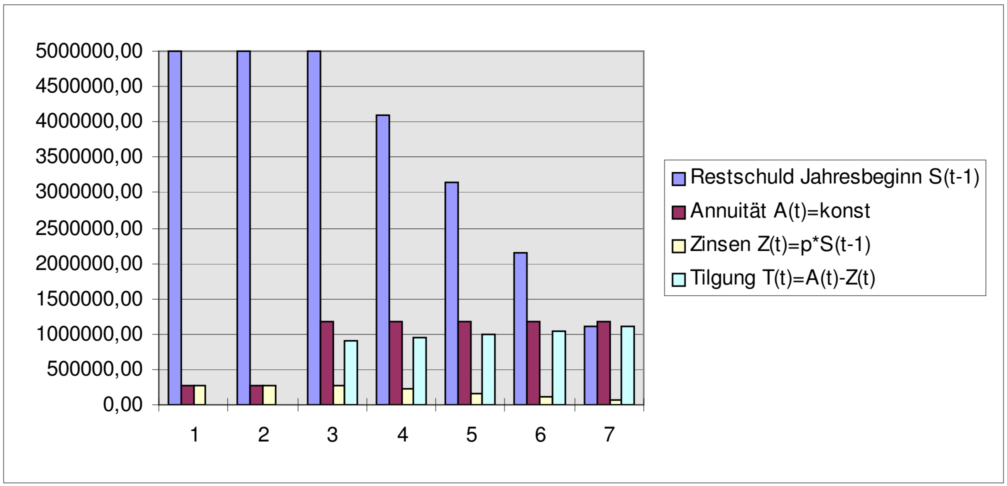
$$T_2 = T_1 \cdot q = 946395{,}54$$

$$T_3 = T_2 \cdot q = 997264{,}30$$

$$T_4 = T_3 q = 1050867{,}26$$

$$T_5 = T_4 \cdot q = 1107351{,}38$$

Jahr	n_T	Schulden des Vorjahres	Annuität	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Tilgung $T_t = A - Z_t$	Schulden am Jahresende $S_t = S_{t-1} - T_t$
1		5000000,00	268750,00	268750,00	0,00	5000000,00
2		5000000,00	268750,00	268750,00	0,00	5000000,00
3	1	5000000,00	1166871,51	268750,00	898121,51	4101878,49
4	2	4101878,49	1166871,51	220475,97	946395,54	3155482,94
5	3	3155482,94	1166871,51	169607,21	997264,30	2158218,64
6	4	2158218,64	1166871,51	116004,25	1050867,26	1107351,38
7	5	1107351,38	1166871,51	59520,14	1107351,38	0,00



3.2.2. Tilgung mit Aufgeld (=Agio)

$$\boxed{A_t = Z_t + T_t + \alpha \cdot T_t}$$

Aufgeld = Prozentsatz $\alpha \cdot$ Tilgungsrate an den Gläubiger zusätzlich zu entrichten

3.2.2.1. Annuitätentilgung mit Aufgeld

$$S_1 = S_0 - T_1 = S_0 - \frac{A_1 - Z_1}{1+\alpha} = S_0\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right) - \frac{1}{1+\alpha}\cdot A_1$$

$$S_2 = S_1 - T_2 = S_1 - \frac{A_2 - Z_2}{1+\alpha} = S_1\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right) - \frac{A_2}{1+\alpha} = S_0\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^2 - \frac{1}{1+\alpha}\left(A_1\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right) + A_2\right)$$

Allgemein: $$\boxed{S_t = S_0\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^t - \frac{1}{1+\alpha}\left(A_1\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^{t-1} + \ldots A_t\right)}$$

$$S_n = 0 \Leftrightarrow \qquad S_0 = \frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{A_1}{\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)} + \frac{A_2}{\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^2} + \ldots \frac{A_n}{\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^n}\right)$$

$$\boxed{q^* = 1 + \frac{p}{1+\alpha} \qquad S_0 = \frac{1}{1+\alpha}\sum_{t=1}^{n}\frac{A_t}{q^{*t}}}$$

Annuitätentilgung: $A_1 = A_2 = \ldots = A_t \to S_0 = \frac{1}{1+\alpha}\,\frac{q^{*n}-1}{q^*-1}\cdot\frac{1}{q^{*n}}\cdot A$

$$\boxed{A = (1+\alpha)\frac{(q^*-1)q^{*n}}{q^{*n}-1}\cdot S_0 = \frac{p\cdot\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^n}{\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^n - 1}\cdot S_0}$$

Bsp: Kredit 6% über 5 Jahre $S_0 = 800000$ $\quad q^* = 1 + \frac{p}{1+\alpha} = 1{,}05825$

Agio 3% $\quad A = \frac{p\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^n}{\left(1+\frac{p}{1+\alpha}\right)^n - 1} \cdot S_0 = 194685{,}58$

Rekursive Berechnung für Excel: $Z_t = p \cdot S_{t-1}$ $\quad T_t = \frac{A_t - Z_t}{1+\alpha}$ $\quad$ Aufgeld $_t = \alpha \cdot T_t$

Jahr	Schulden des Vorjahres S_{t-1}	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Annuität	Tilgung $T_t = \frac{A_t - Z_t}{1+\alpha}$	Agio $_t = \alpha \cdot T_t$	Schulden am Jahresende $S_t = S_{t-1} - T_t$
1	800000,00	48000,00	194685,58	142413,18	4272,40	657568,62
2	657568,62	39455,21	⋮	150709,09	4521,27	506877,73
3	506877,73	30412,66	⋮	159488,26	4784,64	347389,46
4	347389,46	20843,37	⋮	168778,84	5063,37	178610,62
5	178610,62	10716,64	⋮	178610,62	5358,32	0

insgesamt bezahlt: $nA = 973428$

3.2.2.2. Ratentilgung mit Aufgeld

$$\boxed{T = \frac{S_0}{n} = \text{konstant}}$$

$$S_t = S_0 - t \cdot T$$

$$Z_t = pS_{t-1} = p(S_0 - (t-1) \cdot T) = p\left(S_0 - (t-1) \cdot \frac{S_0}{n}\right) = S_0\left(p - \frac{t-1}{n}p.\right) \text{wie gehabt}$$

$$A_t = Z_t + T_t(1+\alpha) = S_0\left(p - \frac{t-1}{n}p.\right) + \frac{S_0}{n}(1+\alpha) \text{ da Zuschlag } T \cdot \alpha = \frac{S_0}{n} \cdot \alpha \text{ pro Zinsperiode}$$

$$A_t = S_0\left(p\left(1 - \frac{t-1}{n}\right) + \frac{1+\alpha}{n}\right)$$

gleicher Kredit wie vorhin: $p = 6\%$ $\quad S_0 = 800000$ $\quad \alpha = 3\%$ $\quad n=5$

Jahr	Schulden des Vorjahres S_{t-1}	Zinsen $Z_t = p \cdot S_{t-1}$	Annuität $A_t = Z_t + T_t + Agio$	Tilgung $T = \frac{S_0}{n}$	Agio$= \alpha \cdot T$	Schulden am Jahresende $S_t = S_{t-1} - T_t$
1	800000	48000	212000	160000	4800	640000
2	640000	38400	203200	⋮	⋮	480000
3	480000	28800	193600	⋮	⋮	320000
4	320000	19200	184000	⋮	⋮	160000
5	160000	9600	174400	⋮	⋮	0

insgesamt bezahlt 968000 (weniger als bei Annuitätentilgung)